ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO QUỲNH ANH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ CO CYCLIC TRONG KHÔNG GIAN $G-$METRIC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO QUỲNH ANH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ CO CYCLIC TRONG KHÔNG GIAN $G-$METRIC VÀ ỨNG DỤNG

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Đào Quỳnh Anh

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2020

Tác giả

Đào Quỳnh Anh

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động đóng vai trò rất quan trọng và hữu ích trong toán học. Nó được áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau như lí thuyết bất đẳng thức biến phân, lí thuyết tối ưu hóa và lý thuyết xấp xỉ... Khả năng ứng dụng rộng rãi của lý thuyết điểm bất động trong các lĩnh vực khác nhau dẫn đến một số suy rộng của không gian metric. Trong số đó, có thể đề cập đến không gian quasimetric, không gian metric riêng, không gian D-metric và không gian G-metric. Một trong số những suy rộng thú vị nhất là không gian G-metric được giới thiệu bởi Mustafa and Sims [12] vào năm 2006, đã thu hút được sự chú ý của các nhà toán học. Từ đó, một số định lý điểm bất động trong không gian metric suy rộng đã được nhiều tác giả giới thiệu như: H. Aydi [2], V. Berinde [4], D. Boyd, J. Wong [6], E. Karapınar [7-10], W. Shatanawi [14],…

Một chủ đề hấp dẫn khác của lý thuyết điểm bất động là khái niệm của ánh xạ cyclic đã được giới thiệu bởi Krik [11] và các cộng sự vào năm 2003. Từ đó, điểm bất động của các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện co cyclic đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Năm 2005, Petrusel đã chứng minh một số kết quả về điểm tuần hoàn của ánh xạ co cyclic. Kết quả này là tổng quát hóa kết quả của Kirk. Năm 2010, Pacurar và Rus [13] đã chứng minh một số kết quả về điểm bất động đối với ánh xạ f - co cyclic trong không gian metric. Năm 2011, Karapınar [7] đã đạt được kết quả về điểm bất động đối với ánh xạ f - co yếu cyclic. Năm 2014, N. Bilgili, I. M. Erhan, E. Karapınar và D. Turkoglu [5] đã đã đạt được kết quả về điểm bất động đối với ánh xạ co cyclic trong không gian G - metric.

Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài "*Định lí điểm bất động đối với ánh xạ co cyclic trong không gian G-metric và ứng dụng*".

Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Nội dung đề tài được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [3] và [14] gồm 37 trang, gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian G-metric và một số kết quả về điểm bất động đối với các ánh xạ Cyclic co Banach và ánh xạ f - co yếu Cyclic mở rộng trong không gian G - metric.

Chương 2: Là nội dung chính của đề tài, trình bày một số kết quả về điểm bất động đối với ánh xạ f - co cyclic và ánh xạ $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{f})$- co cyclic và điểm bất động chung đối với các ánh xạ cyclic thỏa mãn điều kiện w - khoảng cách trong không gian G - metric.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian G-metric

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là một tập khác rỗng, hàm $G : E^3 \to \mathbb{R}^+$ gọi là một $G-$ metric trên E nếu với $\forall a,b,c,r \in E$ các điều kiện sau thỏa mãn:

$(G1)$ $G(a,b,c) = 0$ nếu $a = b = c$,

$(G2)$ $0 < G(a,a,b)$ với mọi $a,b \in E$ với $a \neq b$,

$(G3)$ $G(a,a,b) \le G(a,b,c)$ với mọi $a,b,c \in E$ với $b \neq c$,

$(G4)$ $G(a,b,c) = G(a,c,b) = G(b,c,a) = \ldots$ (đối xứng trong cả ba biến),

$(G5)$ $G(a,b,c) \le G(a,r,r) + G(r,b,c)$ (bất đẳng thức hình chữ nhật).

Khi đó cặp (E,G) gọi là một không gian $G-$ metric.

Chú ý rằng mỗi $G-$ metric trên E xác định một metric ρ_G trên E bởi

$$\rho_G(a,b) = G(a,b,b) + G(b,a,a) \text{ với mọi } a,b \in E. \quad (1.1)$$

Ví dụ 1.1.2. Cho (E,ρ) là một không gian metric.

Hàm $G : E^3 \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi

$$G(a,b,c) = \max\{\rho(a,b), \rho(b,c), \rho(c,a)\}, \quad (1.2)$$

với mọi $a,b,c \in E$, là một $G-$ metric trên E.

Ví dụ 1.1.3. Cho $E = [0,+\infty)$. Hàm $G : E^3 \to \mathbb{R}^+$, xác định bởi

$$G(a,b,c) = |a-b| + |b-c| + |c-a|, \quad (1.3)$$

với $\forall a,b,c \in E$, là một $G-$ metric trên E.

Định nghĩa 1.1.4. Cho (E,G) là một không gian $G-$ metric. Dãy $\{a_n\} \subset E$ gọi là $G-$ hội tụ đến $a \in E$ nếu

$$\lim_{n,m \to +\infty} G(a,a_n,a_m) = 0, \quad (1.4)$$

tức là, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $G(a, a_n, a_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq N$. Ta gọi a là giới hạn của dãy và viết là $a_n \to a$ hay $\lim a_n = a$.

Mệnh đề 1.1.5. Cho (E, G) là một không gian $G-$ metric. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

(1) $\{a_n\}$ là $G-$ hội tụ đến a

(2) $G(a_n, a_n, a) \to 0$ khi $n \to +\infty$,

(3) $G(a_n, a, a) \to 0$ khi $n \to +\infty$,

(4) $G(a_n, a_m, a) \to 0$ khi $n, m \to +\infty$.

Định nghĩa 1.1.6. Cho (E, G) là một không gian $G-$ metric. Dãy $\{a_n\}$ gọi là dãy $G-$ Cauchy nếu với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $\mathrm{N} \in \mathbb{N} : G(a_n, a_m, a_l) < \varepsilon$ với $\forall m, n, l \geq \mathrm{N}$, tức là $G(a_n, a_m, a_l) \to 0$ khi $m, n, l \to +\infty$.

Mệnh đề 1.1.7. *Cho (X, G) là một không gian $G-$ metric. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*:

(1) $\{a_n\}$ *là dãy* $G-$ *Cauchy*

(2) *Với mọi* $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *sao cho* $G(a_n, a_m, a_m) < \varepsilon$, *với* $\forall m, n \geq N$.

Định nghĩa 1.1.8. Không gian $G-$ metric (E, G) gọi là đầy đủ nếu mọi dãy $G-$ Cauchy đều hội tụ trong (E, G).

Định nghĩa 1.1.9. Cho (E, G) là không gian $G-$ metric. Ánh xạ $T : E^3 \to E$ gọi là liên tục nếu với ba dãy $G-$ hội tụ bất kỳ $\{a_n\}, \{b_n\}$ và $\{c_n\}$ lần lượt hội tụ đến a, b, c, thì $\{T(a_n, b_n, c_n)\}$ là $G-$ hội tụ đến $T(a, b, c)$.

Định nghĩa 1.1.10. Một $G-$ metric G gọi là đối xứng nếu

$$G(a, a, b) = G(a, b, b), \quad \forall p, q \in E.$$

Mỗi $G-$ metric G trên E sinh ra một tôpô τ_G trên E có cơ sở là họ các $G-$ hình cầu mở $\{B_G(a, \varepsilon), a \in E, \varepsilon > 0\}$, trong đó

$$B_G(a,\varepsilon) = \{b \in E, G(a,b,b) < \varepsilon\} \text{ với mọi } a \in E \text{ và } \varepsilon > 0.$$

Tập con $A \neq \emptyset$ trong (E,G) là $G-$ đóng nếu $\overline{A} = A$, trong đó

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow B_G(a,\varepsilon) \cap A \neq 0, \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Mệnh đề 1.1.11. *Cho (E,G) là một không gian $G-$ metric và A là một tập con khác rỗng của E. A là đóng nếu với bất kỳ dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến a, thì $a \in A$.*

Năm 2012, Karapınar, Yıldız-Ulus và Erhan [5] đã đạt được một số kết quả về điểm bất động đối với các ánh xạ cyclic co Banach và $\varphi-$ co yếu cyclic mở rộng trên không gian $G-$ metric. Cụ thể như sau;

1.2. Điểm bất động đối với các ánh xạ cyclic co Banach và $\varphi-$ co yếu cyclic trên không gian $G-$ metric

Định nghĩa 1.2.1. Cho A và B là hai tập con khác rỗng của không gian E. Một ánh xạ $T : A \cup B \to A \cup B$ gọi là cyclic nếu $T(A) \subseteq B$ và $T(B) \subseteq A$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho $F_i, i = 1,2,\dots,m$ là các tập khác rỗng, $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$, và ánh xạ $\varphi : F \to F$. $\bigcup_{i=1}^m F_i$ gọi là biểu diễn cyclic của F đối với φ nếu $\varphi(F_1) \subset F_2, \dots, \varphi(F_{m-1}) \subset F_m$, $\varphi(F_m) \subset F_1$.

Định lý 1.2.3. [10] *Cho (E,G) là không gian $G-$ metric đầy đủ và $\{F_j\}_{j=1}^m \subset E$, F_j đóng, $F_j \neq \emptyset$. Đặt $F = \cup_{j=1}^m F_j$. Cho $S : F \to F$ thỏa mãn*

$$S(F_j) \subseteq F_{j+1}, \; j = 1,\dots,m, \; F_{m+1} = F_1.$$

Nếu $\exists \lambda \in (0,1)$:

$$G(Sa,Sb,Sc) \le \lambda G(a,b,c)$$

xảy ra với $\forall a \in F_j$ và $b,c \in F_{j+1}$, $j = 1,\dots,m$ thì S có một điểm bất động duy nhất trong $\cap_{j=1}^m F_j$.